UNA DEMOSTRACIÓN DEL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HARDY

A DEMONSTRATION OF HARDY'S UNCERTAINTY PRINCIPLE

Héctor José Cabarcas Urriola[1]
Universidad de Cartagena, Bolívar Colombia
Alberto Enrique Rodríguez Castilla[2]
Institución Educativa Olga González Arraut

Recibido: junio 8 de 2023 – Aceptado: septiembre 28 de 2023

Resumen: En este trabajo demostraremos el famoso principio de incertidumbre de Hardy, el cual establece que una función y su transformada de Fourier no pueden decaer ambas muy rápidamente (más rápido que cualquier exponencial e^(-ct)) en el infinito. Tal demostración envuelve algunos estudios del análisis complejo y del análisis de Fourier.

Palabras clave: Análisis; Transformada; Fourier; Incertidumbre; Hardy.

Abstract: In this paper, we will demonstrate the famous Hardy's uncertainty principle, which states that a function and its Fourier transform cannot both decay very rapidly (faster than any exponential e^(-ct)) at infinity. Such demonstration involves some studies of complex analysis and Fourier analysis

Keywords: Analysis; Transform; Fourier; Uncertainty; Hardy.

Introducción

El principio de incertidumbre de Hardy, además de ser un teorema clásico del análisis armónico, también se puede enfocar como una característica distintiva de la mecánica cuántica, que establece las limitaciones de efectuar mediciones en un sistema sin perturbarlo, es decir, un par de variables canónicas conjugadas, tales como la posición y el momento, no pueden determinarse precisamente en ningún estado cuántico. Por otra parte, en la física clásica, este principio expresa una limitación sobre la duración que una señal (una onda de sonido, un haz de luz, etc.) puede tener en un tiempo determinado, y del ancho de banda que ocupe su transformada de Fourier. (Ver [6] , [7] y [8]).

Algo de Historia

En 1748 empieza la historia moderna de las transformadas de Fourier, cuando Jean Le Rond D'Alembert y Leonhard Paul Euler se dedicaron al problema de la cuerda vibrante, usando el método de propagación de las ondas. Euler afirmó que si la configuración de la cuerda en un instante determinado se podía establecer como combinación lineal de los modos normales (que forman una serie sinusoidal armónica), esto seguiría siendo válido en los instantes siguientes de tiempo. El método utilizado por D'Alembert y Euler fue concretado por Daniel Bernoulli en 1753, cuando expresó la solución del problema como superposición de ondas sencillas. Esta idea fue utilizada y perfeccionada por Jean-Baptiste Joseph Fourier en 1807, quien presentó en la Academia Francesa de las Ciencias el resultado de unos estudios relacionados con la conducción del calor en los que incluía un método de resolución para las ecuaciones allí planteadas. En su trabajo, publicado en 1822 en el clásico libro "Théorie analytique de la Chaleur", Fourier afirmó que cualquier distribución calórica

[1] Doctor en Matemáticas. Universidad de San Pablo, Brasil. Docente de la universidad de Cartagena Departamento de Matemáticas, correo, hcabarcasu@unicartagena.edu.co.
[2] Magíster en Matemática Pura y Aplicada. Universidad Federal de San Pablo, Brasil, docente de Matemáticas en la I.E. Olga González de Arraut, arodriguezc0418@gmail.com

podía descomponerse en una suma de distribuciones espaciales sinusoidales, lo que se conoce como serie de Fourier y más tarde generalizó esta teoría para extenderla a señales aperiódicas, recibiendo el nombre de transformada de Fourier.

La transformada de Fourier, es empleada por ejemplo, para transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia, además de ser reversible, siendo capaz de transformarse en cualquiera de los dominios al otro. El oído humano recibe una onda auditiva y la transforma, descomponiéndola en distintas frecuencias (que es lo que finalmente se escucha) a medida que pasa el tiempo, sin embargo, la transformada de Fourier contiene todas las frecuencias del tiempo durante el cual existió la señal, obteniéndose un sólo espectro de frecuencias para toda la función.

Una de las múltiples aplicaciones fue, a finales del siglo XIX, la de Lord Kelvin quien diseñó una computadora analógica con el fin de predecir el flujo y reflujo de las mareas, en la que se pone de manifiesto la utilidad de las teorías propuestas por Fourier para obtener la periodicidad de ciertos fenómenos a través de su observación en el tiempo.
Otra muestra presente en la naturaleza es la de la descomposición de la luz solar en distintos colores, ya sea cuando se forma un arco iris; o bien cuando ésta atraviesa un prisma, en este caso, una radiación luminosa de composición incierta es descompuesta en haces de luz coloreada, o señales, de frecuencia simple. Esto es en definitiva, lo que se percibe cuando se habla de la transformada de Fourier, una herramienta matemática capaz de extraer la información frecuencial de una forma de onda una vez conocido su comportamiento temporal y viceversa.

Preliminares

A continuación veremos algunos resultados del análisis complejo y del análisis de Fourier cuyas demostraciones pueden ser encontradas en [1] y [2].

Proposición 1. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función impar e integrable, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(z)\ dz = 0.$$

Lema 2. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión definiciones analíticas que convergen uniformemente a una función f en cualquier subconjunto compacto de S, entonces f es analítica en S. (Ver [1]).

Teorema 3. Definamos $F(z,t)$ para $(z,t) \in S \times [a,b]$ donde S es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Supongamos que F satisface las siguientes propiedades:

i. $F\,(z,t)$ es analítica en z para cada t.
ii. F es continua en $S \times [a,b]$.

Entonces la función f definida en S por

$$f(z) = \int_a^b F\,(z,t)\ dt$$

es analítica en S. (Ver [1]).

Teorema 4. (Principio de Phragmén-Lindelöf). Supongamos que f es analítica en un sector D del plano complejo con apertura angular $< \pi$ y que f es continua en la clausura de D. Si

$$|f(z)| \leq Ke^{k|z|}$$

en todo D para contantes $k > 0$, $K > 0$ y si $|f(z)| \leq M$ en la frontera de D, entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D$. (Ver [2]).

Teorema 5. (Teorema de Liouville). Si f es entera y acotada, entonces f es constante. (Ver [1]).

Por otro lado, una función $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, es *absolutamente integrable* si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty; \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Si f es absolutamente integrable, entonces su *transformada de Fourier* se define por:

$$\hat{f}\,(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

y su contraparte, la *fórmula inversa de Fourier* por:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\,(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

siempre que $\hat{f}$ sea absolutamente integrable. (Ver [1]).

Observación 6. Si f es absolutamente integrable, entonces su transformada de Fourier es acotada. En efecto, si f es absolutamente integrable entonces

$$\left|\hat{f}\,(\xi)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\left|e^{-2\pi i x \xi}\right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx < \infty.$$

En adelante, escribiremos $f(x) = O\left(e^{-\pi x^2}\right)$, para indicar que existen constantes $c > 0$ y $M > 0$ tales que $|f(x)| \leq c e^{-\pi x^2}$ cuando $|x| > M$.

Principio de Incertidumbre de Hardy

Demostraremos formalmente el principio de incertidumbre de Hardy, siguiendo los pasos dados en el ejercicio 12 del Capítulo 4 en [1] y de algunas demostraciones que podemos observar en [5], [6], [7] y [8], parecidas pero no iguales a la siguiente.

Teorema 7. (Principio de incertidumbre de Hardy) Si f es una función en $\mathbb{R}$ que satisface

(1.) $f(x) = O\left(e^{-\pi x^2}\right)$ y $\hat{f}\,(\xi) = O\left(e^{-\pi \xi^2}\right)$

entonces f es un múltiplo constante de $e^{-\pi x^2}$.

Demostración: Primero haremos algunas observaciones que se deducen de la condición *(1.)*. Sea f una función en $\mathbb{R}$ que satisface *(1.)*. Veamos que la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier están bien definidas, puesto que f $\hat{f}$ son absolutamente integrables. En efecto, como existen constantes $c > 0$ y $\hat{c} > 0$ tales que

(2.) $|f(x)| \leq c\, e^{-\pi x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad$ y $\qquad \left|\hat{f}\,(\xi)\right| \leq \hat{c}\ e^{-\pi \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R};$

se tiene que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx \leq\ c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx = c$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}\,(\xi)\,| d\xi \leq\ \hat{c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \xi^2}\, d\xi = \hat{c},$$

por lo que f y $\hat{f}$ son absolutamente integrables. Ahora, extendamos la función $\hat{f}$ a todo el plano complejo. Tomemos $\xi = a + ib$, con $a, b \in\ \mathbb{R}$, entonces

$$\widehat{f}\ (\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x(a+ib)}\, dx$$

y vemos que la función extendida está bien definida, ya que f es absolutamente integrable. Además,

$$\begin{aligned} \left|\widehat{f}\ (\xi)\right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i a x} e^{2\pi b x}\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, \left|e^{-2\pi i a x}\right| \left|e^{2\pi b x}\right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-\pi x^2} e^{2\pi b x}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-\pi\left(x^2 - 2bx\right)}\ dx \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(x^2 - 2bx + b^2\right) + \pi b^2}\ dx = c e^{\pi b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x-b)^2}\, dx. \end{aligned}$$

Para resolver está integral, usemos el teorema del cambio de variables. Tomemos,

$$s = \sqrt{\pi}\,(x-b) \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{\pi},$$

de donde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x-b)^2}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\sqrt{\pi}(x-b)\right]^2}\ dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Por lo tanto,

(3.) $\quad \left|\widehat{f}\ (\xi)\right| \leq\ c e^{\pi\left(\mathrm{Im}(\xi)\right)^2}.$

Definiendo $R(\xi, x) = f(x) e^{-2\pi i x \xi}$ para $(\xi, x) \in\ \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, vemos que la función $R(\xi, x)$ es analítica en ξ para todo x y continua en $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Luego si

$$\widehat{f_n}\,(\xi) =\ \int_{-n}^{n} R(\xi, x)\, dx = \int_{-n}^{n} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\ dx,$$

vemos que $\widehat{f_n}\,(\xi)$ es entera por el Teorema 3., luego $\widehat{f_n}$ es analítica en cualquier subconjunto compacto S de $\mathbb{C}$ y afirmamos que en cualquier disco D cuya clausura está contenida en S, la sucesión $\left\{\widehat{f_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $\widehat{f}$ y aplicando el Lema 2., se concluye que $\widehat{f}$ es analítica en S, por lo tanto $\widehat{f}\ (\xi)$ es entera.

Ahora, empezaremos la prueba del teorema. Primero mostraremos el resultado cuando f sea una función par, luego cuando f sea una función impar. Por último, probaremos el resultado para cualquier función f escribiéndola como una suma adecuada de una función par y una función impar.

Sea f una función par, veamos que $\widehat{f}$ se extiende a una función entera par. En efecto, si f es par entonces

$$\begin{aligned} \widehat{f}\ (\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(-2\pi x \xi)\ + i\, \mathrm{sen}(-2\pi x \xi)]\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) \cos(2\pi x \xi)\,]\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\, \mathrm{sen}(-2\pi x \xi)\,]\ dx. \end{aligned}$$

Como $f(x)\,\mathrm{sen}(-2\pi x \xi)$ es una función impar, puesto que el producto de una función par y una función impar es impar, por la Proposición 1., tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\, \mathrm{sen}(-2\pi x \xi)]\, dx = 0.$$

Luego,

$$\widehat{f}\ (-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\cos(-2\pi x\xi)]\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\cos(2\pi x\xi)]\,dx = \widehat{f}\ (\xi)$$

y por definición $\widehat{f}$ es par.

Ahora, sea $g(z) = \widehat{f}\left(\sqrt{z}\right)$. Vemos que g está bien definida, pues si $z = Re^{i\theta}$ con $R \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $\sqrt{z}$ tiene dos raíces:

$$z_0 = \sqrt{R}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ y } z_1 = \sqrt{R}\, e^{i\left(\left(\frac{\theta}{2}\right)+\pi\right)} = -z_0,$$

pero como $\widehat{f}$ es par

$$g(z) = \widehat{f}\ \left(\sqrt{z}\right) = \widehat{f}\ (z_0) = \widehat{f}\ (-z_0) = \widehat{f}\ (z_1).$$

Además, g es una función entera y por ende continua, puesto que $\widehat{f}$ es entera.

Por *(2.)* tenemos que

(4.) $$|g(x)| = \left|\widehat{f}\left(\sqrt{x}\right)\right| \leq \hat{c}\, e^{-\pi\left(\sqrt{x}\right)^2} = \hat{c}\, e^{-\pi x}, \qquad x \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)$$

y por *(3.)*,

(5.) $$|g(x)| = \left|\widehat{f}\left(\sqrt{x}\right)\right| \leq ce^{\pi\left(\operatorname{Im}\left(\sqrt{x}\right)\right)^2} = ce^{\pi\left(\sqrt{-x}\right)^2} = ce^{-\pi x}, \qquad x \in \mathbb{R}^-.$$

Por lo tanto, de *(4.)* y *(5.)*

$$|g(x)| = \left|\widehat{f}\ \left(\sqrt{x}\right)\right| \leq ce^{\pi\left(\operatorname{Im}\left(\sqrt{x}\right)\right)^2} = ce^{\pi\left(\sqrt{-x}\right)^2} = ce^{-\pi x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

En general tomando $z = Re^{i\theta}$ con $R \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, por *(3.)* tenemos que

$$|g(z)| = \left|\widehat{f}\left(\sqrt{z}\right)\right| \leq ce^{\pi\left(\operatorname{Im}\left(\sqrt{z}\right)\right)^2}.$$

Como

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{Re^{i\theta}} = \pm\sqrt{R}\left[e^{i\theta}\right]^{1/2} = \pm\sqrt{R}\, e^{i\theta/2} = \pm\left[\sqrt{R}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sqrt{R}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

entonces.

(6.) $$|g(z)| \leq ce^{\pi\left(\pm\sqrt{R}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} = ce^{\pi R \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \leq ce^{\pi R} = ce^{\pi|z|},$$

ya que $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 1$ y $R = |z|$.

Definiendo $F(z) = g(z)e^{\gamma z}$ en el sector

$$D = \{\ z\ |\ 0 \leq \theta \leq \pi/\beta < \pi\},$$

donde $\theta = \arg(z)$ y

$$\gamma = i\pi \frac{e^{-\frac{i\pi}{2\beta}}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)},$$

vemos que F está bien definida, puesto que g lo está.

Además,

i) F es analítica en D, ya que g y $e^{\gamma z}$ son funciones enteras.

ii) F es continua en $\overline{D}$, ya que g y $e^{\gamma z}$ son funciones continuas.

iii) $|F(z)| \leq Ke^{k|z|}$ en todo D, con $K = \max\{c, \hat{c}\}$ y $k = 2\pi$. En efecto;

$$|F(z)| = |g(z)||e^{\gamma z}|$$

$$|F(z)| = |g(z)|\left|e^{i\pi\frac{e^{-\frac{i\pi}{2\beta}}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}Re^{i\theta}}\right| = |g(z)|\left|e^{i\frac{\pi Re^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2\beta}\right)}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}}\right|$$

$$|F(z)| = |g(z)|\left|e^{i\frac{\pi R\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2\beta}\right)+i\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{2\beta}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}}\right|$$

$$|F(z)| = |g(z)|\left|e^{\frac{i\pi R\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2\beta}\right)\right]-\pi R\left[\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{2\beta}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}}\right| = |g(z)|\ e^{\frac{-\pi R\left[\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{2\beta}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}}.$$

Luego si $\theta = 0$, $z = R \geq 0$ y por *(4.)* tenemos que

(7.) $$|F(z)| \leq \hat{c}\ e^{-\pi R}\ e^{\frac{-\pi R\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2\beta}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}} = \hat{c}\ e^{-\pi R}\ e^{\pi R} = \hat{c} \leq \hat{c}\ e^{2\pi|z|}.$$

Si $0 < \theta < \pi/\beta$, entonces $-\pi/(2\beta) < \theta - \pi/(2\beta) < \pi/(2\beta)$, de donde

$$-1 < \frac{\operatorname{sen}(\theta - \pi/(2\beta))}{\operatorname{sen}(\pi/(2\beta))} < 1$$

y por *(6.)*

$$|F(z)| \leq c\ e^{\pi R}\ e^{\frac{-\pi R \operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{2\beta}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}} \leq c\ e^{\pi R}\ e^{\pi R} = c\ e^{2\pi|z|}.$$

Además, si $\theta = \pi/\beta$, entonces

(8.) $$|F(z)| \leq\ c\ e^{\pi R}e^{\frac{-\pi R \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}} \leq\ c\ e^{\pi R}e^{-\pi R} = c \leq\ c\ e^{2\pi|z|}.$$

Por lo tanto, $|F(z)| \leq\ \max\{c, \hat{c}\}\ e^{2\pi|z|}$ en todo D.

iv) $|F(z)| \leq M$ en la frontera de D, con $M = \max\{c, \hat{c}\}$. En efecto, para $\theta = 0$ se tiene por *(7.)* que $|F(z)| \leq\ \hat{c}$ y para $\theta = \pi/\beta < \pi$ se tiene por *(8.)* que $|F(z)| \leq c$. Luego en la frontera de D,

$$|F(z)| \leq\ \max\{c, \hat{c}\}.$$

De los ítems i), ii), iii) y iv) se obtiene que F es analítica en D, F es continua en $\overline{D}$, $|F(z)| \leq\ Ke^{k|z|}$ en todo D para constantes $k > 0$, $K > 0$ y $|F(z)| \leq M$ en $\partial(D)$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 4. (Principio de Phragmén-Lindelöf),

$$|F(z)| \leq \max\{c, \hat{c}\}; \qquad \forall z \in D.$$

Haciendo $\beta \rightarrow\ 1$, vemos que

$$|F(z)| = |g(z)|e^{\frac{-\pi R[-\cos(\theta)]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = |g(z)|e^{\pi R cos\theta} \leq\ \max\{c, \hat{c}\}; \qquad \forall z \in D.$$

Del mismo modo podemos aplicar este argumento a cualquier sector en el plano complejo con apertura angular estrictamente menor que π, concluyendo que

$$|g(z)|e^{\pi R\cos(\theta)} \leq\ \max\{c, \hat{c}\}$$

para todo $z = Re^{i\theta}$ en el plano complejo. Note que

$$|g(z)e^{\pi z}| = |g(z)|\left|e^{\pi R[\cos(\theta)+i\,\operatorname{sen}(\theta)]}\right| = |g(z)|e^{\pi R\cos(\theta)} \leq \max\{c, \hat{c}\}.$$

Así, vemos la función entera $g(z)e^{\pi z}$ es acotada por $M = \max\{c, \hat{c}\}$ en todo el plano complejo. Entonces, por Teorema 5. (Teorema de Liouville) la función $g(z)e^{\pi z}$ es una función constante. Por lo tanto, para alguna constante t, se tiene que

$$g(z)e^{\pi z} = t \quad \Rightarrow \quad \hat{f}\left(\sqrt{z}\right) = g(z) = te^{-\pi z}.$$

De donde, $\hat{f}(z) = te^{-\pi z^2}$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\pi\xi^2}e^{2\pi i x\xi}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\pi\left(\xi^2-2\pi i x\xi\right)}\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\pi\left(\xi^2-2\pi i x\xi+(ix)^2-(ix)^2\right)}\,d\xi = te^{-\pi x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\xi-ix)^2}\,d\xi \\ &= t\,e^{-\pi x^2}. \end{aligned}$$

Por lo que f es un múltiplo constante de $e^{-\pi x^2}$, como se quería probar.

Ahora, sea f una función impar, mostremos que $\hat{f}$ se extiende a una función impar. En efecto, si f es impar entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(-2\pi x\xi) + i\operatorname{sen}(-2\pi x\xi)] \quad dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\cos(2\pi x\xi)]\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\operatorname{sen}(2\pi x\xi)]\,dx. \end{aligned}$$

Como $f(x)\cos(2\pi x\xi)$ es una función impar, puesto que el producto de una función par y una función impar es impar, por la Proposición 1., tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\cos(2\pi x\xi)]\,dx = 0.$$

De donde,

$$\hat{f}(-\xi) = -i\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\operatorname{sen}(-2\pi x\xi)]\,dx = -\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\operatorname{sen}(2\pi x\xi)]\,dx\right] = -\hat{f}(\xi)$$

y por definición $\hat{f}$ es impar. Además,

$$\hat{f}(0) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x)\operatorname{sen}\left(2\pi x(0)\right)\right]dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} (0)\,dx = 0.$$

De donde,

$$\hat{f}(-\xi) = -i\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\operatorname{sen}(-2\pi x\xi)]\,dx = -\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\operatorname{sen}(2\pi x\xi)]\,dx\right] = -\hat{f}(\xi)$$

y por definición $\hat{f}$ es impar. Además,

$$\hat{f}(0) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x)\operatorname{sen}\left(2\pi x(0)\right)\right]dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} (0)\,dx = 0.$$

Por otro lado, como $\hat{f}$ es entera, entonces $\hat{f}$ es analítica en $z = 0$, por lo que $\hat{f}$ es infinitamente diferenciable en $z = 0$ y utilizando series de Taylor obtenemos que

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}^{(n)}(0)}{n!}(z-0)^n = \hat{f}(0) + \hat{f}^{(1)}(0)z + \frac{\hat{f}^{(2)}(0)}{2!}z^2 + \frac{\hat{f}^{(3)}(0)}{3!}z^3 + \cdots$$

y como $\hat{f}(0) = 0$,

$$\widehat{f}(z) = \widehat{f}^{(1)}(0)z + \frac{\widehat{f}^{(2)}(0)}{2!}z^2 + \frac{\widehat{f}^{(3)}(0)}{3!}z^3 + \cdots .$$

Luego,

$$\frac{\widehat{f}(z)}{z} = \widehat{f}^{(1)}(0) + \frac{\widehat{f}^{(2)}(0)}{2!}z + \frac{\widehat{f}^{(3)}(0)}{3!}z^2 + \cdots .$$

Por lo tanto, la función $\widehat{f}(z)/z$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$ y así la función

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{\widehat{f}(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ \widehat{f}^{(1)}(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

está bien definida. Además $h(z)$ es una función entera par, puesto que $\widehat{f}$ es entera y si $z \neq 0$

$$h(-z) = \frac{\widehat{f}(-z)}{-z} = \frac{-\widehat{f}(z)}{-z} = \frac{\widehat{f}(z)}{z} = h(z).$$

Como $h(z)$ es entera par, del resultado anterior, vemos que $G(z) = h(\sqrt{z})$ está bien definida y es una función entera. Además, si $x \in \mathbb{R}$ y $0 \leq x \leq 1$, como G es continua sobre el disco cerrado $\bar{P}(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$, entonces es acotada. Esto es, existe $m_1 > 0$ tal que $|G(x)| \leq m_1$ para todo $x \in \bar{P}(0,1)$. Por otro lado, si $x \in \mathbb{R}^+$ y $x > 1$, entonces $|\sqrt{x}| > 1$, de donde $1/|\sqrt{x}| < 1$ y por *(4.)* tenemos que

$$|G(x)| = \frac{|f(\sqrt{x})|}{|\sqrt{x}|} < |f(\sqrt{x})| \leq \hat{c}\, e^{-\pi x}.$$

Por lo tanto, si $x \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ entonces

(9.) $$\begin{cases} |G(x)| \leq m_1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ |G(x)| \leq \hat{c}\, e^{-\pi x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En general si $z = Re^{i\theta}$ con $R \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, por *(3.)* tenemos que para $|z| \leq 1$, como G es continua sobre el disco cerrado $\overline{W}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, entonces es acotada. Esto es, existe $M_1 > 0$ tal que $|G(z)| \leq M_1$ para todo $z \in \overline{W}(0,1)$. Como $e^{\pi|z|} \geq 1$ para $z \in \mathbb{C}$, entonces para todo $z \in \overline{W}(0,1)$

$$|G(z)| \leq M_1\, e^{\pi|z|}.$$

Y para $|z| > 1$, se tiene que $|\sqrt{z}| > 1$, de donde $1/|\sqrt{z}| < 1$ y por *(5.)*

$$|G(z)| = \frac{|f(\sqrt{z})|}{|\sqrt{z}|} < |f(\sqrt{z})| \leq c\, e^{\pi|z|}.$$

Por lo tanto, si $z \in \mathbb{C}$ y $K_1 = \max\{M_1, c\}$ entonces

(10.) $|G(z)| \leq K_1\, e^{\pi|z|}$.

Definiendo $H(z) = G(z)e^{\gamma z}$ vemos que H está bien definida, puesto que G lo está y razonando de manera análoga a la anterior vemos que

v) H es analítica en D, ya que G y $e^{\gamma z}$ son funciones enteras.

vi) H es continua en $\bar{D}$, ya que G y $e^{\gamma z}$ son funciones continuas.

vii) $H(z)| \leq Q\, e^{k|z|}$ en todo D, con $Q = \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}, K_1\}$ y $k = 2\pi$. En efecto, procediendo de manera análoga al ítem iii), vemos que

$$|H(z)| = |G(z)|e^{\frac{-\pi R \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2\beta}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}}.$$

Luego si $\theta = 0$; $z = R \geq 0$, $H(z) = |G(z)|e^{\pi R}$ y por *(9.)*:

(11.) $\begin{cases} |H(z)| \le m_1 e^{\pi R} \le m_1 e^{\pi} \le (m_1 e^{\pi}) e^{2\pi|z|} & \text{si } |z| \le 1 \\ |H(z)| \le \hat{c}\ e^{-\pi R} e^{\pi R} = \hat{c} \le \hat{c}\, e^{2\pi|z|} & \text{si } z| > 1. \end{cases}$

Si $0 < \theta < \pi/\beta$, entonces $\pi/(2\beta) < \theta - \pi/(2\beta) < \pi/(2\beta)$, de donde

$$-1 < \frac{\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2\beta}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)} < 1$$

y por *(10.)* tenemos que

$$|H(z)| \le K_1\, e^{\pi R}\, e^{\frac{-\pi R \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2\beta}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}} \le K_1 e^{\pi R} e^{\pi R} = K_1 e^{2\pi|z|}.$$

Además, si $\theta = \pi/\beta$, entonces

(12.) $|H(z)| \le K_1 e^{\pi R} e^{\frac{-\pi R \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}} = K_1 \le K_1 e^{2\pi|z|}$

Por lo tanto, $H(z)| \le \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}, K_1\}\, e^{2\pi|z|}$en todo D.

viii) $|H(z)| \le N$ en la frontera de D, con $N = \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}, K_1\}$. En efecto, para $\theta = 0$ se tiene por *(11.)* que $|H(z)| \le \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}\}$ y para $\theta = \pi/\beta < \pi$ se tiene por *(12.)* que $|H(z)| \le K_1$.

Luego en la frontera de D, $|H(z)| \le \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}, K_1\}$.

De los ítems v), vi), vii) y viii) se obtiene que F es analítica en D, H es continua en $\overline{D}$, $|H(z)| \le Q e^{k|z|}$ en todo D para constantes $k, Q > 0$ y $|H(z)| \le N$ en $\partial(D)$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 4. (Principio de Phragmén-Lindelöf),

$$|H(z)| \le \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}, K_1\}; \qquad \forall z \in D.$$

Haciendo $\beta \to 1$, vemos que para todo z\in D

$$|H(z)| = |G(z)| e^{\frac{-\pi R[-\cos(\theta)]}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = |G(z)| e^{\pi R cos(\theta)} \le \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}, K_1\}.$$

Del mismo modo podemos aplicar este argumento a cualquier sector en el plano complejo con apertura angular estrictamente menor que π, concluyendo que

$$|G(z)| e^{\pi R cos(\theta)} \le \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}, K_1\}.$$

para todo $z = Re^{i\theta}$ en el plano complejo. Note que

$$\left|G(z) e^{\{\backslash pi\ z\}}\right| = |G(z)| \left|e^{\pi R[cos(\theta) + i\, sen(\theta)]}\right| = |G(z)| e^{\pi R\, cos(\theta)} \le \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}, K_1\}.$$

Así, vemos la función entera $G(z)e^{\pi z}$ es acotada por $N = \max\{m_1 e^{\pi}, \hat{c}, K_1\}$ en todo el plano complejo. Entonces, por el Teorema 5. (Teorema de Liouville) tenemos que la función $G(z)e^{\pi z}$ es una función constante. Por lo tanto, para alguna constante s, se tiene que

$$G(z) e^{\pi z} = s \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{f}\,(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = G(z) = s\, e^{-\pi z},$$

de donde, $\hat{f}\,(z) = s\, z e^{-\pi z^2}$. Luego para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\left|\hat{f}\,(\xi)\right| = |s||\xi| e^{-\pi \xi^2} \le \hat{c}\, e^{-\pi \xi^2}$$

concluyéndose que $s = 0$ y así $\widehat{f} = f = 0$.

Finalmente, para cualquier función $f(x)$ se tiene que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, donde $f_1(x) = (f(x) + f(-x))/2$ es una función par y $f_2(x) = (f(x) - f(-x))/2$ es una función impar. Por lo que aplicando el mismo argumento anterior para las funciones pares e impares, vemos que f es un múltiplo constante de $e^{-\pi x^2}$, como se quería probar. ■

Corolario 8. Si

(13.) $f(x) = O\left(e^{-\pi A x^2}\right)$ y $\widehat{f}(\xi) = O\left(e^{-\pi B \xi^2}\right)$,

con $AB > 1$, $A > 0$ y $B > 0$ entonces f es idénticamente cero.

Demostración: Si f es una función en $\mathbb{R}$que satisface *(13.)*, entonces existen constantes $p > 0$ y $\widehat{p} > 0$ tales que

(14.) $|f(x)| \leq p e^{-\pi A x^2}, \ x \in \mathbb{R}$ y $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \widehat{p}\, e^{-\pi B \xi^2}, \ \xi \in \mathbb{R}$.

Donde $AB > 1$, $A > 0$ y $B > 0$. Ahora, definamos $g(x) = f\left(\sqrt{B}\, x\right)$, entonces

$$|g(x)| = \left|f\left(\sqrt{B}\, x\right)\right| \leq p e^{-\pi A \left(\sqrt{B}\, x\right)^2} = p e^{-\pi A B x^2} < p e^{-\pi x^2}$$

Además,

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{B}\, x\right) e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

Para resolver está integral, usemos el teorema del cambio de variables. Haciendo

$$u = \sqrt{B}\, x \ \Rightarrow \ du/dx = \sqrt{B},$$

obtenemos que

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{B}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \left(\frac{u}{\sqrt{B}}\right)\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{B}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i u \left(\frac{\xi}{\sqrt{B}}\right)}\, dx = \frac{\widehat{f}\left(\xi/\sqrt{B}\right)}{\sqrt{B}}.$$

Así, de *(14.)*

$$|\hat{g}(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{B}} \widehat{f}\,(\backslash xi/\sqrt{B})| \leq \backslash \frac{1}{\sqrt{B}} \widehat{p}\, e^{-\pi B \left(\frac{\xi}{\sqrt{B}}\right)^2} = \frac{\widehat{p}}{\sqrt{B}} e^{-\pi \xi^2}.$$

Luego aplicando el caso anterior obtenemos que $g(x) = d e^{-\pi x^2}$, donde d es alguna constante. Por lo tanto, $f(\sqrt{B}\, x) = d e^{-\pi x^2}$, o lo que es lo mismo,

$$f(x) = d e^{-\pi \left(\frac{x^2}{B}\right)}.$$

De *(14.)*, obtenemos

$$|f(x)| = \left| d e^{-\pi \left(\frac{x^2}{B}\right)} \right| \leq p e^{-\pi A x^2}.$$

De aquí, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{|d|}{p} \leq e^{-\pi A x^2} e^{\pi \left(\frac{x^2}{B}\right)} = e^{-\pi \left[A - \left(\frac{1}{B}\right)\right] x^2} = e^{-\pi \left[\frac{AB - 1}{B}\right] x^2}.$$

Como $AB > 1$ y $B > 0$, entonces $[(AB - 1)/B] > 0$, por lo que la desigualdad anterior es compatible solo si $|d| = 0$, ya que

$$\lim_{|x| \to \infty} e^{-\pi \left[\frac{AB - 1}{B}\right] x^2} = 0.$$

Por lo tanto, se concluye que $f = 0$ como se quería probar. ■

Referencias

[1] Stein, E.M., and Shakarchi, R.; Complex analysis. Princenton Lecture in Analysis II. Princeton University Press, 2003.
[2] Paper, J.; Hardy Functions, Princeton University, 2001.
[3] Gerlach Christensen, J.; Uncertainty Principles, May 28, 2003.
[4]Talbut, B.; The uncertainty principle in harmonic analysis, 2014.
[5] Chamizo, F.; Incertidumbre en análisis armónico.
[6] Carrillo, C.; Fundamentos del Análisis de Fourier. Vigo, 2003.
[7] Cañada, A.; Una perspectiva histórica de las series de Fourier, Universidad de Granada.
[8] Duoandikoetxea, J.; Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier, 2003.